PRIMITIVNÍ FUNKCE (neurčitý integrál)

I. Definice: Funkce F je primitivní funkce k f na intervalu (a,b), když platí

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a,b)$$

II. Existence: 1) f je spojitá funkce na (a,b) $\Rightarrow$ na (a,b) existuje k f primitivní fce

2) F, G jsou primitivní k f na (a,b) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ex. $c \in R$ tak, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad x \in (a,b),$$

tedy, k f existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí (pokud má f na (a,b) primitivní fci) a každé dvě se liší o konstantu;

značíme $\qquad F(x)+c = \int f(x)\,dx$

(neurčitý integrál)

III. Výpočet

A) Tabulka integrálů:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \alpha \neq -1 \quad x \in \mathcal{I}_{\alpha} \ (\mathcal{I}_{\alpha} \subset \mathcal{D}(x^{\alpha}))$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \ x \in (-\infty,0), x \in (0,+\infty)$$

$$\int e^{x}dx = e^{x}+c, \ x \in R$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c, \ x \in R$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \ x \in R$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c, \ x \in R$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c, \ x \in (-1,1)$$

B) Je-li $\int f(x)dx = F(x)+c$ na intervalu J, pak

$(a\neq 0)$ $\underline{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c}$ (na odpovídajícím intervalu)

Př. $\int e^{3x+1}dx = \underline{\frac{1}{3}e^{3x+1}+c}, \; x\in R$

$\int \frac{1}{2-5x}dx = \underline{-\frac{1}{5}\ln|2-5x|+c}, \; x\neq \frac{2}{5}$

$\int \frac{1}{1+4x^2}dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \underline{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)+c}, \; x\in R$

C) Vlastnosti neurčitého integrálu, které lze využít při výpočtu (f, g spojité v (a,b))

1) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, $x\in(a,b)$

2) $\int c f(x)dx = c\int f(x)dx$, $x\in(a,b)$

Př. $\int \frac{x-1}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\frac{1}{x}dx - \int\frac{1}{x^2}dx = \underline{\ln|x|+\frac{1}{x}+c}$

$x\in(-\infty,0)$, $x\in(0,+\infty)$

$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int 1dx - \int\cos 2x\,dx\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)+c = \underline{\frac{1}{2}(x-\sin x.\cos x)+c}, \; x\in R$

D) integrace per partes (f', g' spojité v (a,b))

$\underline{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$ v (a,b)

Př. 1) $\int x\sin x\,dx$, $x\in R$ $= \left| \begin{matrix} f'=\sin x, & f=-\cos x \\ g=x, & g'=1 \end{matrix} \right| = -x\cos x + \int\cos x\,dx =$

$= \underline{-x\cos x + \sin x + c}$

2) $\int \ln x\,dx = \int 1\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} f'=1, & f=x \\ g=\ln x, & g'=\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx =$

$x\in(0,+\infty)$

$= \underline{x\ln x - x + c}$

2) $$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2t}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt =$$
$x \in \langle 0, +\infty)$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \underline{2\,(t - \operatorname{arctg} t) + C = 2\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) + C}$$

<u>Ještě několik příkladů k I :</u>

3) $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{t} + C = \underline{\sqrt{1+x^2} + C,\ x \in R}$$

4) $$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x)\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|g(x)| + C,$$
$x \in (a,b)$, g, g' spojité v (a,b), $g(x) \neq 0$ v (a,b)

5) $$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln(1+x^2) + C,$$
$x \in R$

(nebo jednoduše podle vzorce v příkl. 4)

F) <u>Integrace racionálních funkcí</u>

1) jednoduché (parciální) zlomky

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + C, \quad x \neq \alpha$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^n} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C, \ x \neq \alpha$
$n > 1, n \in N$

(iii) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}\,dx =$$
$p^2 - 4q < 0$

substituce vede na

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + C \int \frac{1}{y^2+1}\,dx$$

(viz příklad dále)

3) $\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{matrix} f' = \sin x \,, & f = -\cos x \\ g = \sin x \,, & g' = \cos x \end{matrix} \right| =$

$= -\sin x . \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x . \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \; 2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x$, tedy

$$\underline{\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C, \quad x \in R}$$

E) <u>integrace pomocí substituce</u>

<u>I.</u> f spojitá v (a,b), g' spojitá v (α,β), $g(\alpha,\beta) = (a,b)$:
je-li $\int f(t) dt = F(t) + C$ v (a,b), je

$$\underline{\int f(g(x)) . g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad , x \in (\alpha,\beta)}$$

<u>Př.</u> 1) $\int\limits_{x \in R} e^{-x^2}(-2x) dx = \left| \begin{matrix} -x^2 = t \\ -2x dx = dt \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + C = \underline{e^{-x^2} + C}$

2) $\int \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = \left| \begin{matrix} 1+\sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \end{matrix} \right| = \int \ln t \, dt =$

$= t \ln t - t + C = \underline{(1+\sqrt{x})(\ln(1+\sqrt{x} - 1) + C}, \quad x \in (0,+\infty)$

<u>II.</u> f je spojitá v (a,b), g' spojitá v (α,β), $g' \neq 0$ v (α,β), $g(\alpha,\beta) = (a,b)$.
Pak, je-li $\int f(g(t)) . g'(t) dt = G(t) + C$, $t \in (\alpha,\beta)$

$$\underline{\int f(x) dx = G(g^{-1}(x)) + C \,, \quad x \in (a,b)}$$

<u>Př.</u> 1) $\int\limits_{x \in (-1,1)} \sqrt{1-x^2} \, dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t, \; t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ dx = \cos t \, dt \quad (\cos t > 0) \\ t = \arcsin x \end{matrix} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt =$

$= \int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) =$

$= \underline{\frac{1}{2}(\arcsin x + x . \sqrt{1-x^2}) + C}$

Př. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx + (-3)\int \frac{1}{(x+2)^2+4}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,dx =$

$\displaystyle = \underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{3}{4}\cdot 2\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C,\ x\in\mathbb{R}}$

2) „Návod" pro integraci racionální funkce

$\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, $p(x), q(x)$ – mnohočleny, $\operatorname{st} q(x) \geq 1$

(i) $\underline{\operatorname{st} p(x) \geq \operatorname{st} q(x)}$, pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \tilde{p}(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde $\operatorname{st}\tilde{p} = \operatorname{st} p - \operatorname{st} q$ a $\operatorname{st} r < \operatorname{st} q$

Př. $\displaystyle\frac{x^4-3x^3+5x^2-2x+1}{x^3-3x^2+4x-2} = x + \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+4x-2}$

(dělením)

(ii) $\underline{\operatorname{st} p(x) < \operatorname{st} q(x)}$

$q(x)$ se rozloží na součin kořenových činitelů, které odpovídají reálným kořenům a kvadratických trojčlenů, které nemají reálné kořeny

$q(x) = x^3-3x^2+4x-2$ má kořen $\alpha=1$, tedy

$q(x) = (x-1)(x^2-2x+2)$,

polynom x^2-2x+2 už nemá reálné kořeny

(iii) $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se rozloží na součet parciálních zlomků tvaru:

$$(x-\alpha)^n \to \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

$n = 1, 2 \dots$

$$(x^2+px+q)^n \to \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

zde: $\displaystyle\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+4x-2} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-2x+2)}$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

(iv) neznámé koeficienty v rozkladu se určí metodou neurčitých koeficientů

$$x^2+1 = A(x^2-2x+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x^2+1 = (A+B)x^2 + (-2A+C-B)x + 2A-C$$

$$\begin{aligned} &\text{tj. u } x^2: & A+B &= 1 \\ &\text{u } x: & -2A-B+C &= 0 \\ &\text{u } x^0: & 2A-C &= 1 \end{aligned}$$

odtud: $A=2,\ B=-1,\ C=3$

(v) dále integrace jednotlivých parciálních zlomků

Tedy:

$$\int \frac{x^4-3x^3+5x^2-2x+1}{x^3-3x^2+4x-2}\,dx \underset{(i)}{=} \int x\,dx + \int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+4x-2}\,dx =$$

$$\underset{(ii),(iii)}{=} \frac{x^2}{2} + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-x+3}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| + \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + 2\,\mathrm{arctg}(x-1) + C,$$

$x \in (-\infty, 1)$ nebo $x \in (1, +\infty)$

G) Substituce, vedoucí na integraci racionálních funkcí

($R(t)$ značí racionální funkci)

1) $$\int R(e^x)\,dx = \left| \begin{array}{c} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}dt \end{array} \right| = \int R(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

Př. $$\int \frac{e^x-1}{e^{2x}-2e^x+2}\,dx = \int \frac{t-1}{t^2-2t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \dots$$

2) $\int R(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left|\begin{array}{l}\ln x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{array}\right| = \int R(t)\,dt = \dots$

Př. $\int \frac{\ln x}{\ln^2 x+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \dots$

3) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \left|\begin{array}{c}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t\\ \dots\end{array}\right| = \dots$

Př. $\int \frac{3\sqrt{x}+1}{x(x+2\sqrt{x}+2)}\,dx = \left|\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx = 2t\,dt\end{array}\right| = \int \frac{3t+1}{t^2(t^2+2t+2)}\cdot 2t\,dt = \dots$

4) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \left|\begin{array}{c}\sqrt{ax^2+bx+c} = \underset{(-)}{+}\sqrt{a}\,x \underset{(-)}{+} t\\ \text{(Eulerova substituce)}\\ x = \dots\\ dx = \dots\end{array}\right|$

$a>0$

5) a) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \left|\begin{array}{ll}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, & \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|$

$x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$

nebo intervaly dle R/t)

Př.

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int\frac{1}{3+t^2}\,dt = \dots$$

(Pozn.: $t \in (-\pi, \pi)$,

dále jak periodicky a v bodech $x = (2k+1)\pi$ je třeba primitivní funkci „slepit")

b) Je-li $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, (tj. R je liché v sinu), lze substituovat $\cos x = t$:

Př. $$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = \dots$$

Podobně, pro $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (R je liché v cosinu), lze substituovat $\sin x = t$:

c) Je-li $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, lze substituovat $\operatorname{tg} x = t$

(i pro $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ – substituce $\operatorname{tg} x = t$)

Př. 1) $$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = dt \end{array} \right| = \left(\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right)$$

$x \in \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^2}\,dt = \dots$$

2) $$\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$x \in (\dots)$

$$= \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \dots$$